绝密★启用前

2020-2021 学年郑州市实验高级中学高三第一次月考试题

数学（文）

时间：120 分钟　分值：150 分

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知全集$U=\mathbf{R}$，集合$A=\{x\,|\,x-2\geq 0\}$，$B=\{1,2,3\}$，则$(\complement_U A)\cap B=$

A. $\{1\}$　　B. $\{1,2\}$　　C. $\{2,3\}$　　D. $\{2\}$

2.已知 i 是虚数单位，且复数$z_1=3-bi, z_2=1-2i$，且$\dfrac{z_1}{z_2}$是实数，则实数b的值为

A. -6　　B. 0　　C. $\dfrac{1}{6}$　　D. 6

3.若a，b，c满足$2^a=3$，$b=\log_2 5$，$3^c=2$. 则

A. $c<a<b$　　B. $b<c<a$　　C. $a<b<c$　　D. $c<b<a$

4. 命题$p:\forall x\geq 0$，都有$e^x\geq -x+1$，则命题p的否定为

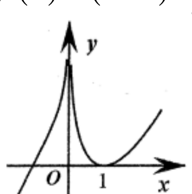
A. $\forall x\geq 0$，都有$e^x<-x+1$　　B. $\forall x<0$，都有$e^x\geq -x+1$

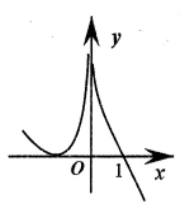
C. $\exists x_0\geq 0$，$e^x<-x_0+1$　　D. $\exists x_0<0$，$e^x<-x_0+1$

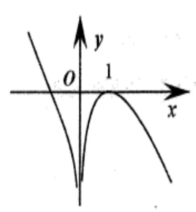
5. 达芬奇的经典之作《蒙娜丽莎》举世闻名.如图，画中女子神秘的微笑，，数百年来让无数观赏者人迷.某业余爱好者对《蒙娜丽莎》的缩小影像作品进行了粗略测绘，将画中女子的嘴唇近似看作一个圆弧，在嘴角A,C处作圆弧的切线，两条切线交于B点，测得如下数据：$AB=6cm, BC=6cm, AC=10.392cm$（其中$\dfrac{\sqrt{3}}{2}\approx 0.866$，$\dfrac{\sqrt{2}}{2}\approx 0.707$）.根据测量得到的结果推算：将《蒙娜丽莎》中女子的嘴唇视作的圆弧对应的圆心角大约等于

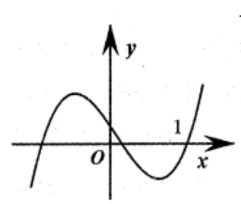
A. $\dfrac{\pi}{4}$　　B. $\dfrac{\pi}{3}$　　C. $\dfrac{\pi}{2}$　　D. $\dfrac{2\pi}{3}$

6.函数$f(x)=(x-1)\ln|x|$的图象可能为

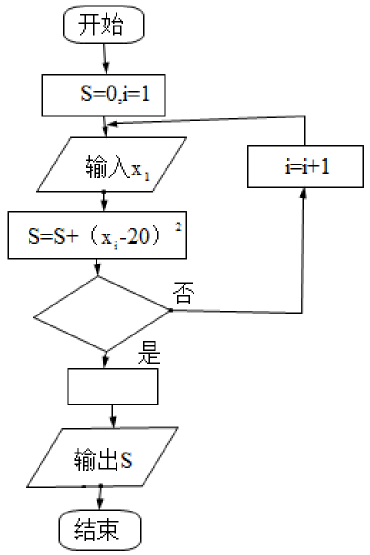
A. 

B. 

C. 

D. 

7.框图与程序是解决数学问题的重要手段，实际生活中的一些问题在抽象为数学模型之后，可以制作框图，编写程序，得到解决，例如，为了计算一组数据的方差，设计了如图所示的程序框图，其中输入$x_1=15$，$x_2=16$，$x_3=18$，$x_4=20$，$x_5=22$，$x_6=24$，$x_7=25$，则图中空白框中应填入



A. $i>6$，$S=\dfrac{S}{7}$　　B. $i\geqslant 6$ $S=\dfrac{S}{7}$

C. $i>6$，$S=7S$　　D. $i\geqslant 6$，$S=7S$

8. 已知向量$\vec{a}=(0,2)$，$\vec{b}=(2\sqrt{3},x)$，且$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角为$\dfrac{\pi}{3}$，则x=

A. -2　　B. 2　　C. 1　　D. -1

9.要得到函数$y=2\cos(2x+\dfrac{\pi}{3})$的图象，只需将函数$y=\sin 2x+\sqrt{3}\cos 2x$的图象

A. 向右平移$\dfrac{\pi}{2}$个单位　　B. 向右平移$\dfrac{\pi}{3}$个单位

C. 向左平移$\dfrac{\pi}{4}$个单位　　D. 向左平移$\dfrac{\pi}{8}$个单位

10. 已知点O是$\triangle ABC$内部一点，且满足$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$，又$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=2$，$\angle BAC=60°$则$\triangle OBC$的面积为

A. $\sqrt{3}$　　B. 1　　C. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　D. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

11. 声音是由物体振动产生的声波,其中包含着正弦函数.纯音的数学模型是函数$y=A\sin\omega t$,我们听到的声音是由纯音合成的,称之为复合音.若一个复合音的数学模型是函数$f(x)=\sin x+\dfrac{1}{2}\sin 2x$,则下列结论错误的是

A. 2π是$f(x)$的一个周期　　B. $f(x)$在$[0,2\pi]$上有 3 个零点

C. $f(x)$ 最大值为$\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$　　D. $f(x)$在$\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$上是增函数

12. 已知定义在$\boldsymbol{R}$上的函数$f(x)=\begin{cases}\ln x, x>1\\ |x^2-x|, x\leqslant 1\end{cases}$，若函数$k(x)=f(x)-ax$恰有 2 个零点，则实数$a$的取值范围是

A. $(-1,0)\cup\left(\dfrac{1}{e},1\right)$　　B. $(-\infty,-1)\cup\left(\dfrac{1}{e},1\right)$

C. $(-\infty,-1)\cup\left(\dfrac{1}{e},1\right)\cup\{0\}$　　D. $(-1,0)\cup\{0\}\cup\left(\dfrac{1}{e},1\right)$

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分

13.若曲线$f(x)=mxe^x+n$在$(1,f(1))$处　切线方程为$y=ex$，则$m+n=$__________

14.已知正项等比数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，若$a_4=\dfrac{1}{8}$，$S_3-a_1=\dfrac{3}{4}$，则$S_4=$__________

15.下列四个函数中，__________满足函数 $f(x)$ 是偶函数，且函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是增函数.（填写满足两个条件的函数所对应的序号）

① $f(x)=x^4-2x^2$ ② $f(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ ③ $f(x)=x\sin x$ ④ $f(x)=\dfrac{1}{3}x^2+\cos x$

16.在 $\triangle ABC$ 中，内角 A,B,C 的对边分别是 a,b,c ，若 $a^2-b^2=\sqrt{3}bc$ ，$\sin C=2\sqrt{3}\sin B$ ，则 $A=$____.

三、解答题：本大题共 70 分，解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.第 17-21 题为必考题，每个试题考生都必须作答第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答.

(一)必考题：共 60 分

17.数列 $\{a_n\}$ 满足：$\dfrac{a_1}{2}+\dfrac{a_2}{3}+\cdots+\dfrac{a_n}{n+1}=n^2+n$ ，$n\in\mathbf{N}^*$

（1）求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）设 $b_n=\dfrac{1}{a_n}$，数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，求满足 $S_n>\dfrac{9}{20}$ 的最小正整数 n.

18. 在△ABC 中，∠A，∠B，∠C 的对边分别为 a，b，c，已知向量 $\boldsymbol{m}=\left(\cos B,\ 2\cos^2\dfrac{C}{2}-1\right)$，$\boldsymbol{n}=(c,\ b-2a)$，且 $\boldsymbol{m}\ \boldsymbol{n}=0$.

(1)求∠C 的大小；

(2)若点 D 为边 AB 上一点，且满足 $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DB}$，$|\overrightarrow{CD}|=\sqrt{7}$，$c=2\sqrt{3}$，求△$ABC$ 的面积.

19. 随着生活水平的逐步提高，人们对文娱活动的需求与日俱增，其中观看电视就是一种老少皆宜的娱乐活动．但是我们在观看电视娱乐身心的同时，也要注意把握好观看时间，近期研究显示，一项久坐的生活指标——看电视时间，是导致视力下降的重要因素，即看电视时间越长，视力下降的风险越大. 研究者在某小区统计了每天看电视时间 x（单位：小时）与视力下降人数 y 的相关数据如下：

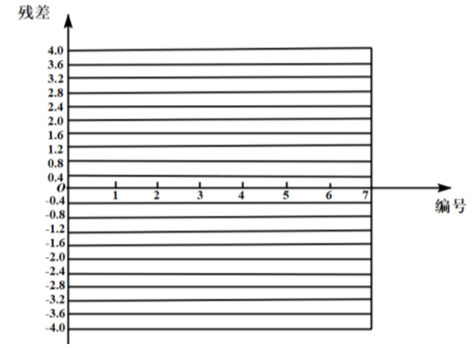
编号	1	2	3	4	5
x	1	1.5	2	2.5	3
y	12	16	22	24	26

（1）请根据上面的数据求 y 关于 x 的线性回归方程

（2）我们用（1）问求出 线性回归方程 $\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$ 的 y 估计回归方程 $y=bx+a$ ，由于随机误差 $e=y-(bx+a)$，所以 $\hat{e}=y-\hat{y}$ 是 e 的估计值，e_i 成为点（x_i ，y_i ）的残差.

①填写下面 残差表，并绘制残差图；

编号	1	2	3	4	5
x	1	1.5	2	2 5	3
y	12	16	22	24	26
e_i					



②若残差图所在带状区域宽度不超过 4，我们则认为该模型拟合精度比较高，回归方程的预报精度较高，试根据①绘制的残差图分折该模型拟合精度是否比较高？

附：回归直线 $y=bx+a$ 斜率和截距的最小二乘估计分别为

$$b=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-n\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\bar{x}^2}，\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}.$$

20. 已知 $\triangle ABC$ 中，内角 A，B，C 所对的边分别是 a，b，c 且 $a\cos B=b\cos A$，BC 边上的中线 AD 的长为 4，

（1）若 $A=\dfrac{\pi}{6}$，求 c；

（2）求 $a+\sqrt{2}c$ 的最大值.

21. 已知函数 $f(x)=ax-1-\ln x\ (a\in\mathbf{R})$.

（1）讨论函数 $f(x)$ 在定义域内的极值点的个数；

（2）若函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极值，对 $\forall x\in(0,+\infty)$，$f(x)\geq bx-2$ 恒成立，求实数 b 的取值范围.

(二)选考题：共 10 分．请考生在第 22、23 题中任选一题作答，如果多做，则按所做的第一题计分.

22.已知在平面直角坐标系 xOy 中，直线 l 的参数方程为 $\begin{cases}x=-t\\ y=4+t\end{cases}$（$t$ 为参数），曲线 C_1 的方程为 $x^2+(y-1)^2=1$.以坐标原点 O 为极点，x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系.

（1）求直线 l 和曲线 C_1 的极坐标方程；

（2）曲线 $C_2:\theta=\alpha\left(\rho>0,0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$ 分别交直线 l 和曲线 C_1 于点 A，B，求 $\dfrac{|OB|}{|OA|}$ 的最大值及相应 α 的值.

23.已知函数 $f(x)=|3x-a|+|3+x|$.

（1）若 $a=3$，解不等式 $f(x)\leq 6$；

（2）若不存在实数 x，使得 $f(x)\leq 1-a-|6+2x|$，求实数 a 的取值范围.